بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی
تاسیس ۱۳۰۷

مکانیک شکست و خستگی

تألیف و ترجمه:
رحمت الله قاجار
محسن قاجار

شماره ۵۰۴

شابک: 978-622-6655-78-1

ناشر: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی press.kntu.ac.ir

عنوان: مکانیک شکست و خستگی

تألیف و ترجمه: دکتر رحمت‌الله قاجار و مهندس محسن قاجار

ویرایش: دوم

نوبت چاپ: اول

تاریخ انتشار: شهریور ۱۴۰۰

شمارگان: ۵۰۰ جلد

چاپ: کیان‌نقش

صحافی: گرنامی

قیمت: ***** تومان

تمام حقوق برای ناشر محفوظ است

خیابان میرداماد غربی– شماره ۴۷۰– انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی – تلفن: ۸۸۸۸۱۰۵۲
میدان ونک – خیابان ولی‌عصر(عج) – بالاتر از چهارراه میرداماد – شماره ۲۶۲۶– مرکز پخش و فروش انتشارات
تلفن: ۸۸۷۷۲۲۷۷ رایانامه: press@kntu.ac.ir – تارنما (فروش برخط): press.kntu.ac.ir

إِنَّا جَعَلْنَا مَا عَلَى الْأَرْضِ زِينَةً لَّهَا لِنَبْلُوَهُمْ أَيُّهُمْ أَحْسَنُ عَمَلاً

قرآن کریم، سوره کهف، آیه ۷

تقدیم به:

- **شهید محسن قاجار که آیه فوق سرآغاز وصیت‌نامه‌اش است.**
- **جانباز شهید محمد قاجار که در روز تولد امام محمد باقر علیه‌السلام بدنیا آمد و در روز شهادت آن امام همام به خاک سپرده شد.**
- **پدر و مادرانی که چنین فرزندانی را تربیت می‌کنند.**

علی دوانی، روحانی و تاریخ‌نگار برجسته ایران در یکی از آثار خود حادثه‌ای را بیان می‌کند که آموزنده و عبرت‌انگیز است:

*"در یکی از سال‌های چند دهه قبل، در شهر کاظمین، سیل ویرانگری آمد و خسارت‌های فراوانی به بار آورد. مردم داغ‌دیده و مصیبت‌کشیده در مجلسی با حضور جمعی از عالمان دینی گرد آمده بودند. فردی با تأسف اظهار می‌دارد که این سیل بنیان‌کن، نتیجه گناهان ما است. مرحوم آیت‌الله سید هبت‌الله شهرستانی از عالمان صاحب‌نام آن روزگار که در مجلس حضور داشت در پاسخ می‌گوید: مردم نماز می‌خوانند، روزه می‌گیرند و سایر عبادات و تکالیف خود را نیز انجام می‌دهند؛ بنابراین باید دید که کدام گناه باعث این فاجعه شده است؟ او در ادامه می‌گوید: گناه اصلی ما این است که طی چند سال اخیر، بارها به چشم خویش دیدیم که "سد سیل برگردان" **ترک** برداشته و در حال فروپاشی است. باید می‌دانستیم که این سد، تاب و توان ایستادگی در برابر سیل را ندارد ولی به این نکته توجه نداشتیم و برای ترمیم سد، اقدامی نکردیم. تا آن‌که امروز در پی آن گناه بی‌توجهی به این فاجعه گرفتار شدیم."*

فهرست: عنوان صفحه

فصل ۱ مروری بر تئوری الاستیسیته ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ تبدیل تنش ۲

۱-۳ تغییر شکل صفحه‌ای ۳

۱-۴ تابع تنش ایری ۴

۱-۵ توابع تنش مختلط ۵

۱-۶ نگاشت همدیس ۸

۱-۷ نگاشت ورق نامحدود حاوی حفره تحت تنش دوردست ۱۳

فصل ۲ ضرورت مکانیک شکست و چکیده آن ۱۹

۲-۱ مقدمه ۱۹

۲-۲ ترک در سازه ۲۲

۲-۳ تنش در نوک ترک ۲۵

۲-۴ معیار گریفیث ۳۵

۲-۵ معیار باز شدگی ترک ۴۰

۲-۶ انتشار ترک ۴۱

مسائل ۴۸

فصل ۳ مکانیزم شکست و رشد ترک ۵۱

۳-۱ مقدمه ۵۱

۳-۲ شکست ترد (یا شکننده) ۵۹

۳-۳ شکست نرم ۶۴

۳-۴ ترک خوردن در اثر خستگی ۷۴

۳-۵ ترک خوردن به کمک محیط ۸۵

۳-۶ تحلیل واماندگی دستگاه‌ها ۸۸

مسائل ۸۹

فصل ۴ میدان تنش ارتجاعی در نوک ترک ۹۱

۴-۱ تابع تنش ارتجاعی ۹۱

۴-۲ تابع تنش مختلط ۹۳

۴-۳ حل مسأله ترک ۹۷

۴-۴ اثر اندازه‌های محدود ۱۰۴

۴-۵ حالت‌های خاص ۱۰۹

۴-۶ ترک‌های بیضوی ۱۱۳

۴-۷ چند نکتهٔ مفید ۱۲۰

۴-۸ معیار نشت قبل از شکست مخازن تحت فشار ۱۲۳

۴-۹ مکانیک شکست مود ترکیبی ۱۲۷

۴-۱۰ جهت ترک در مود ترکیبی ۱۳۲

۴-۱۱ معیار چگالی انرژی کرنشی بحرانی (SEDC) در مود ترکیبی ۱۳۳

فهرست: عنوان | صفحه

۴-۱۲ اهمیت فیزیکی مفهوم چگالی انرژی کرنشی ۱۳۶

۴-۱۳ پایداری مسیر ترک ۱۳۹

۴-۱۴ تنش و جابجایی در اجسام ترک‌دار ۱۴۷

۴-۱۵ ضریب شدت تنش ۱۵۳

۴-۱۶ چقرمگی شکست ۱۵۴

۴-۱۷ شکل ترک ۱۵۹

۴-۱۸ انرژی رها شده ۱۶۱

۴-۱۹ مودهای تغییرشکل نوک ترک ۱۶۲

۴-۲۰ تابع تنش وسترگارد ۱۶۷

۴-۲۱ ضریب تصحیح پیکربندی ۱۷۹

۴-۲۲ تابع تنش ویلیامز ۱۷۹

مسائل ۱۸۲

فصل ۵ پلاستیسیته نوک ترک ۱۹۵

۵-۱ تصحیح منطقه پلاستیک ایروین ۱۹۵

۵-۲ روش داگدیل ۲۰۱

۵-۳ مدل ناحیه چسبناک ۲۰۵

۵-۴ شکل منطقه پلاستیک ۲۰۹

الف: روش ون مایزی ۲۱۱

ب: روش ترسکا ۲۱۳

۵-۵ مقایسه تنش صفحه‌ای با کرنش صفحه‌ای ۲۱۸

۵-۶ ضریب قید پلاستیک ۲۲۳

۵-۷ اثر ضخامت ۲۲۸

۵-۸ تعیین تجربی چقرمگی شکست یک ماده ۲۳۳

مسائل ۲۴۴

فصل ۶ اصل انرژی ۲۴۷

۶-۱ نرخ آزاد شدن انرژی ۲۴۷

روش‌های به‌دست آوردن G ۲۵۳

۶-۲ معیار رشد ترک ۲۵۶

۶-۳ مقاومت ترک (منحنی R) ۲۶۱

۶-۴ وادادگی ۲۶۹

۶-۵ انتگرال J ۲۷۳

۶-۶ مدول‌های پارگی ۲۷۹

مسائل ۲۸۳

فصل ۷ دینامیک و توقف ترک ۲۸۷

چند تعریف ۲۸۷

۷-۱ سرعت ترک و انرژی جنبشی ۲۸۸

۷-۲ شدت تنش دینامیکی و نرخ آزاد شدن انرژی ۲۹۵
۷-۳ انشعاب ترک ۲۹۸
۷-۴ اصول توقف ترک ۳۰۳
۷-۵ استحکام شکست دینامیکی ۳۱۳
۷-۶ تعیین چقرمگی شکست دینامیکی توسط آزمایش ضربه شارپی ۳۱۶
مسائل ۳۱۸

فصل ۸ استحکام شکست کرنش صفحه‌ای ۳۲۳
۸-۱ استانداردهای آزمایش ۳۲۳
۸-۲ محدودیت‌های اندازه ۳۲۷
۸-۳ غیرخطی بودن ۳۳۰
۸-۴ قابلیت اجرا ۳۳۴
مسائل ۳۳۷

فصل ۹ رفتار تنش صفحه‌ای و گذرا ۳۳۹
۹-۱ مقدمه ۳۳۹
۹-۲ مفهوم مهندسی تنش صفحه‌ای ۳۴۰
۹-۳ مفهوم منحنی R ۳۴۹
۹-۴ اثر ضخامت ۳۵۶
۹-۵ آزمایش تنش صفحه‌ای ۳۶۷

مسائل ۳۷۵

فصل ۱۰ معیار جابجایی بازشدگی ترک ۳۸۱

۱۰-۱ شکست بعد از تسلیم کلی ۳۸۱

۱۰-۲ جابجایی باز شدن نوک ترک ۳۸۴

۱۰-۳ استفاده‌های ممکن از معیار *CTOD* ۳۸۸

۱۰-۴ تعیین تجربی *CTOD* ۳۸۹

۱۰-۵ پارامترهای مؤثر روی *CTOD* بحرانی ۳۹۳

۱۰-۶ محدودیت‌ها، شکست در تسلیم کلی ۳۹۶

مسائل ۴۰۰

فصل ۱۱ انتشار ترک خستگی ۴۰۵

۱۱-۱ مقدمه ۴۰۵

۱۱-۲ رشد ترک و ضریب شدت تنش ۴۰۶

۱۱-۳ عوامل مؤثر در انتشار ترک ۴۱۴

۱۱-۴ بارگذاری با دامنه متغیر ۴۲۱

۱۱-۵ پیش‌بینی رشد ترک ۴۲۶

۱۱-۶ علائم و تشخیص ترک خستگی ۴۳۲

۱۱-۷ تحلیل واماندگی‌های مهندسی ۴۳۴

۱۱-۸ سپر نوک ترک ۴۳۵

۱۱-۹ مکانیک شکست الاستیک- پلاستیک و انتگرال مداری J ۴۳۹

مسائل ۴۴۵

فصل ۱۲ تعیین ضرایب شدت تنش ۴۵۵

۱۲-۱ مقدمه ۴۵۵

۱۲-۲ روش‌های تحلیلی و عددی ۴۵۶

۱۲-۳ روش‌های اجزاء محدود ۴۵۸

۱۲-۴ روش‌های تجربی ۴۶۸

۱۲-۵ روش تابع وزن ۴۷۵

۱۲-۶ توابع گرین ۴۷۷

۱۲-۷ تابع وزن بوکنر ۴۷۸

۱۲-۸ تخمین ضرایب شدت تنش ۴۸۶

مسائل ۴۸۸

فصل۱۳ شکست سازه‌ها ۴۹۵

۱۳-۱ مقدمه ۴۹۵

۱۳-۲ مخازن تحت فشار و خطوط لوله ۴۹۷

۱۳-۳ خروج سیال قبل از شکست مخزن ۵۰۸

۱۳-۴ انتخاب مواد ۵۱۴

۱۳-۵ تحلیل فروریختگی (پهن شدگی لوله، تورفتگی جدار لوله) ۵۱۸

۱۳-۶ استفاده از انتگرال J برای تحلیل سازه‌ای ۵۲۵

۱۳-۷ استفاده از طرح‌های تخمینی J ۵۲۸

۱۳-۸ دقت محاسبات شکست ۵۳۲

پیوست‌ها ۵۳۹

فهرست راهنما ۵۴۵

پیشگفتار

یکی از مهمترین دست‌آوردهای علم و تکنولوژی، تأمین رفاه و آسایش زندگی بشر می‌باشد. با وجود دستیابی نسبی به این خواسته، متأسفانه وقوع بعضی حوادث ناگوار از جمله شکست پیش‌بینی نشده سازه‌ها که عموماً در اثر پدیده خستگی رخ می‌دهند، این آسایش را به مخاطره انداخته و علاوه بر گرفتن جان انسان‌ها، خسارت مالی فراوانی را موجب شده‌اند.

در بررسی علل شکست، محققین دریافتند که طراحی بسیاری از این سازه‌ها بر مبنای روش‌های مرسوم درست بوده است، امّا پس از تحقیقات زیاد به این نتیجه رسیدند که عامل شکست، معایب و به‌خصوص ترک‌های بسیار ریزی بودند که در سازه وجود داشته و یا در حین کار ایجاد شده‌اند. دانش موجود اوایل قرن ۲۰، قادر به تجزیه و تحلیل و کشف علل شکست این سازه‌ها نبوده است. لذا در دهه دوم قرن بیستم، علم جدیدی به نام **مکانیک شکست (Fracture Mechanics)** پایه‌گذاری شد که به تجزیه و تحلیل سازه‌ها بر مبنای وجود عیب و به‌خصوص ترک در آن‌ها می‌پردازد.

علم مکانیک شکست یکی از علوم مهندسی است که پدیده شکست قطعات را تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی بررسی می‌کند. بر اساس شناخت دقیق این پدیده است که طراحی ایمن سازه‌ها امکان پذیر می‌باشد. این علم کاربرد گسترده‌ای در صنایع خودروسازی، کشتی‌سازی، نیروگاهی، فضایی، انرژی اتمی، و . . . دارد.

کتاب حاضر کوششی است در جهت آشنایی محققین (به ویژه دانشجویان) با مفاهیم، اصول و کاربرد علم مکانیک شکست. اگر چه در ایران تا به حال درس مکانیک شکست بیشتر برای دانشجویان کارشناسی ارشد و دکترای رشته‌های مهندسی مکانیک، عمران، علم مواد و هوافضا ارائه شده‌است، امّا به علت کاربرد روز افزون آن، اخیراً در بعضی از دانشگاه‌های کشور نیز در مقطع کارشناسی به عنوان یک درس تخصصی ارائه می‌گردد.

در سال ۱۳۸۱ هجری شمسی کتابی با عنوان **مقدمه‌ای بر مکانیک شکست شامل ۶ فصل** به همت مؤلف اوّل و توسط انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی انتشار یافت. در فروردین سال ۱۳۸۸ کتاب **مکانیک شکست و خستگی** توسط همین انتشارات منتشر گردید که دارای ۱۲ فصل و مباحث جدیدی نسبت به کتاب قبلی بود. برای فهم آسان‌تر مطالب تعدادی مثال در فصول مختلف ارائه گردید. این نسخه در سال‌های بعد هم منتشر شد و در

دسترس دانش پژوهان قرار گرفت. تجربه تدریس متوالی کتاب حاضر، لزوم عناوین جدیدی همچون تابع وزن، مدل ناحیه چسبناک، توابع پتانسیل مختلط و نگاشت همدیس را نشان داد. لذا مقرر گردید در ویرایش حاضر این عناوین در کتاب گنجانده شود. لذا یک فصل با عنوان مبانی تئوری الاستیسیته به اول کتاب اضافه و بعضی عناوین در فصول ۴، ۵ و ۱۲ درج شده‌اند. همانند نسخه‌های قبلی کتاب **"Elementary Egineering Fracture Mechanics"** تألیف David Broek به عنوان مبنا و مرجع اصلی قرار گرفت و بیشتر مطالب از این کتاب می‌باشد. سعی شده در مباحث مهم و کاربردی که به نظر مؤلفین کامل نبوده‌اند، مطالب تکمیلی افزوده شود. از آنجا که کتاب فوق‌الذّکر فاقد مثال حل شده می‌باشد، مثال‌های متعددی در کتاب حاضر حل شده‌اند. قابل ذکر است که بیشتر مطالب جدید از کتاب **"The Mechanics of Fracture and Fatigue"** تألیف **A. P. Parker** می‌باشد.

فصل ۱ به مروری به مبانی تئوری الاستیسیته اختصاص دارد.

در فصل ۲ ضمن بیان ضرورت مکانیک شکست و آشنایی با مفاهیم کلی آن، خلاصه‌ای از اصول علم مکانیک شکست و بعضا فصول آتی کتاب ارائه می‌گردد، به‌طوری که خواننده پس از خواندن این فصل با بیشتر مطالب کتاب آشنایی مختصر پیدا می‌کند.

ممکن است که خواننده، مطالب این فصل را خوب درک نکند. لذا توصیه می‌شود افرادی که آشنایی چندانی با مکانیک شکست ندارند، مطالعه را از فصل ۳ و یا حتی از فصل ۴ شروع کنند.

در فصل ۳ مکانیزم شکست و رشد ترک از دیدگاه علم مواد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۴ که مهم‌ترین فصل کتاب می‌باشد به تعیین معادلات میدان تنش الاستیک در همسایگی ترک‌های راه به در، سطحی (نیم بیضوی) و گوشه‌ای (ربع بیضی) بر اساس مکانیک شکست ارتجاعی خطی اختصاص دارد. معیار نشت قبل از شکست، مکانیک شکست مود ترکیبی، معیارهای شکست، پایداری شکست نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند. توجه شود که مطالب فصول بعدی بر این فصل استوار است.

در نوک ترک، منطقه پلاستیک وجود دارد، لذا در فصل ۵، مکانیک شکست الاستوپلاستیک، اندازه منطقه پلاستیک با تقریب اوّل، تقریب دوم و دقیق بر مبنای معیارهای ون‌مایزی و ترسکا مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند.

در فصل ۶ معیارهای شکست، اصل انرژی، مقاومت ترک، تعیین نرخ رهایش انرژی بر اساس کد ASME، انتگرال J برای مکانیک شکست الاستیک و الاستوپلاستیک بررسی می‌گردد.

فصل ۷ به دینامیک و توقف ترک اختصاص دارد که در آن سرعت رشد تک ترک، سرعت رشد ترک در لحظه انشعاب، چگونگی انشعاب، راه‌های توقف ترک، چقرمگی دینامیکی و تعیین تجربی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل ۸ تعیین چقرمگی شکست کرنش صفحه‌ای با استفاده از دو نمونه CT و خمش سه نقطه توضیح داده می‌شود.

در فصل ۹ به مسائل تنش صفحه‌ای که کاربرد آن زیاد است، پرداخته می‌شود. آزمایش تنش صفحه‌ای با ایجاد ترک اره‌ای نیز مطرح می‌گردد.

فصل ۱۰ به جابجایی باز شدگی ترک و عوامل مؤثر روی CTOD اختصاص دارد.

فصل مهم وکاربردی ۱۱ در مورد ترک خستگی تحت بارهای سیکلی با دامنه ثابت و متغیر می‌باشد. عوامل مؤثر بر گسترش ترک، تأثیر منطقه پلاستیک نوک ترک به‌خصوص در لحظه اعمال یک بار ناگهانی و کند شدن رشد ترک، علائم ترک خستگی نیز مورد بحث قرار می‌گیرند.

در فصل ۱۲ روش‌های تئوری و تجربی تعیین ضریب شدت تنش از جمله اجزاء محدود و فتوالاستیسیته مطرح می‌شوند. عنوان جدید روش تابع وزن برای تعیین ضریب شدت تنش در این فصل قرار داده شده است.

سرانجام شکست و فروپاشی سازه‌ها در فصل ۱۳ توضیح داده می‌شود.

در پایان هر فصل تعدادی مسائل ارائه شده تا دانشجویان با حل آن‌ها به مفاهیم و کاربرد مکانیک شکست و مطالب ارائه شده در فصل بیشتر آشنا شوند.

معادل انگلیسی بعضی از واژه‌هایِ مهم به صورت پاورقی درج شده‌اند.

از محققین به‌خصوص دانشجویان که نواقص و کمبودهای چاپ‌های قبلی را متذکر شدند و با پیشنهادات خود ارائه طریق نمودند، تشکر می‌گردد.

بنابر حدیث شریف **"مَنْ لَمْ يَشْكُرِ الْمُنْعِمَ مِنَ الْمَخْلُوقِينَ لَمْ يَشْكُرِ اللَّهَ عَزَّ وَ جَل"**[۱]، از کلیه افرادی که در تدوین این کتاب زحمتی را متقبل شده‌اند از جمله اعضای محترم شورای

[۱] شیخ صدوق، عیون أخبار الرّضا (ع)، ج ۲، ص ۲۷

انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، کارکنان انتشارات، دانشجویان تقدیر و تشکر می‌شود. از داوران محترمی که زحمت بررسی کتاب و داوری را متقبل و نکات ارزنده‌ای را اعلام فرموده‌اند، قدردانی مخصوص می‌گردد. انشاءالله که خداوند به همگی آن‌ها اجر فراوان عطا فرماید.

از آنجا که هیچ کاری بدون عیب و نقص نیست، مباحث این اثر نیز عاری از اشکال و اشتباه نمی‌تواند باشد. در این راستا از هر گونه انتقاد و پیشنهاد کلیه اساتید محترم، محققین و دانشجویان گرامی استقبال می‌گردد.

خداوند قادر و متعال را شاکر و سپاس‌گزاریم که این توفیق را عطا نمود تا بتوانیم با انجام این کار، ذره‌ای از دین عظیم خود را نسبت به ملت بزرگ و شریف ایران انجام دهیم. عاجزانه از او استمداد می‌طلبیم تا توفیق بیشتری در خدمت به جامعه علمی کشور را به مؤلفین عطا فرماید.

رحمت الله قاجار

محسن قاجار

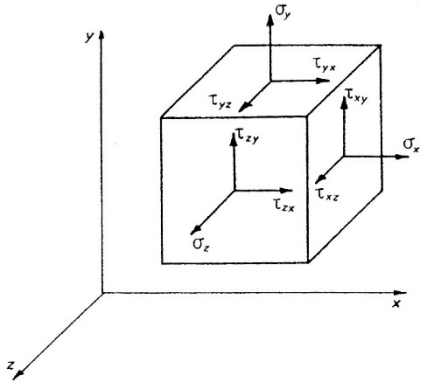
شهریور ۱۴۰۰ هجری شمسی

فصل ۱
مروری بر تئوری الاستیسیته

۱-۱ مقدمه

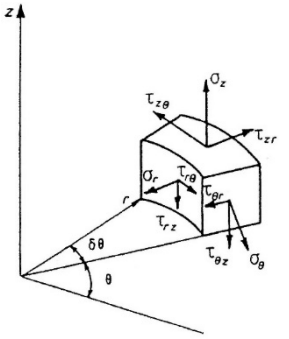
برای پیش‌بینی واماندگی قطعات مهندسی، فهم و درک مفاهیم تنش و کرنش و رابطه بین آن‌ها ضروری می‌باشد. یک روش تعیین تنش و کرنش در اجسام دو بعدی الاستیک خطی استفاده ار تابع تنش ایری[1] است. در دهه‌های اخیر توابع تنش مختلط برای تعیین میدان تنش و کرنش کاربرد زیادی داشته‌اند. همچنین روش نگاشت همدیس[2] در حل مسائل پیچیده ازجمله قطعات ترک‌دار رونق زیادی داشته است.

مؤلفه‌های تنش در نقطه‌ای از یک جسم در محورهای مختصات دکارتی و استوانه‌ای به ترتیب در شکل‌های ۱-۱ و ۱-۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱-۱: تنش‌ها بر روی یک المان سه بعدی

1- Airy
2- Conformal mapping

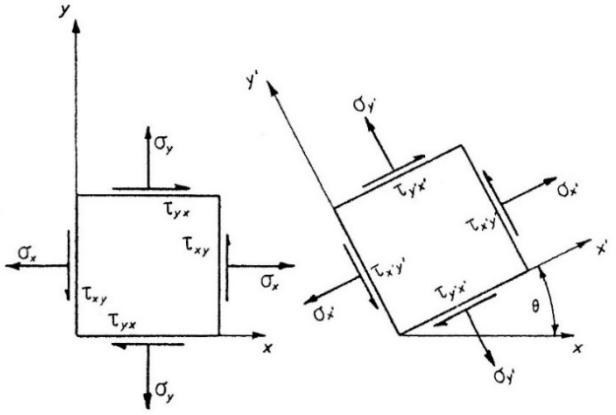


شکل ۱-۲: سیستم تنش استوانه‌ای (قطبی)

۱-۲ تبدیل تنش

عموماً تحلیل‌ها به صورت دو بعدی در دو دستگاه دکارتی و قطبی انجام می‌گیرد. در حل مسائل دو بعدی تبدیل تنش از یک دستگاه دکارتی به دستگاه دیگر دکارتی یا قطبی (و یا برعکس) از ضروریات می‌باشد. چنانچه مطابق شکل ۱-۳ تانسور تنش در دستگاه xy معلوم باشد، تنش‌ها در دستگاه $x'y'$ از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)cos2\theta + \tau_{xy}sin2\theta \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)cos2\theta - \tau_{xy}sin2\theta \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{xy}cos2\theta + \left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)sin2\theta\end{aligned} \qquad (۱-۱)$$



شکل ۱-۳: تبدیل مختصات تنش در یک نقطه

روابط زیر برای این دو تانسور تنش برقرار است:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$
$$\sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2i\tau_{x'y'} = \left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right)e^{2i\theta} \qquad (۲-۱)$$

در این فرمول i عدد موهومی و برابر است با: $i = \sqrt{-1}$

۱-۳ تغییر شکل صفحه‌ای

برای تغییر شکل صفحه‌ای دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای وجود دارد:

الف: تنش صفحه‌ای

در حالتی که ضخامت صفحه (بُعد در جهت z) کوچک باشد، می‌توان از مؤلفه‌ی تنش‌هایی که دارای اندیس z هستند صرف نظر کرد. یعنی:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

روابط تنش-کرنش در این حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_{y)}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_{x)} \qquad (۳-۱)$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$$

ب: کرنش صفحه‌ای

در حالتی که ضخامت صفحه (بُعد در جهت z) در مقایسه با ابعاد دیگر بزرگ باشد، می‌توان از مؤلفه‌ی کرنش‌هایی که دارای اندیس z هستند صرف نظر نمود. یعنی:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

روابط تنش-کرنش در این حالت عبارتند از:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right) \qquad (۴-۱)$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(1 + \frac{\nu}{1-\nu}\tau_{xy}\right)$$

یادآوری می‌شود که روابط کرنش صفحه‌ای را می‌توان از معادلات تنش صفحه‌ای با تبدیل E به $\frac{E}{1-\nu^2}$ و ν به $\frac{\nu}{1-\nu}$ به‌دست آورد. بنابراین با داشتن فرمول‌های تنش صفحه‌ای به آسانی می‌توان فرمول‌های کرنش صفحه‌ای را تعیین نمود.

در حالت تنش صفحه‌ای رابطه سازگاری بر حسب مؤلفه‌های تنش عبارت است از:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + 2(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\tau_{xy} = 0 \qquad (۵-۱)$$

۱-۴ تابع تنش ایری

با داشتن تابع پتانسیل تنش ایری $F(x,y)$، مؤلفه‌های تنش از روابط زیر قابل حصول‌اند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad (۶-۱)$$

با قرار دادن این روابط در معادله سازگاری تنش‌ها، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \qquad (۷-۱)$$

این رابطه که همان رابطه سازگاری بر حسب تابع ایری F می‌باشد را معمولاً به صورت زیر می‌نویسند:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F = 0 \qquad (۸-۱)$$

و یا:

$$\nabla^4 F = 0 \qquad (۹-۱)$$

که در آن ∇^2 عملگر هارمونیک و به صورت $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ می‌باشد.

در بسیاری از مراجع، توابع ایری ارائه شده است. یکی از آن‌ها تابع بوزینسک[1] است که بر حسب مختصات قطبی می‌باشد.

انتخاب توابع پتانسیل تنش به صورت مختلط، آزادی عمل بیشتری را در فرمول‌بندی فراهم می‌کند. توابع مختلط حالت عمومی توابع ایری و بوزینسک می‌باشند و مزایای زیر را دارند:

- عموماً فشرده می‌باشند.

1- Boussinesq

- در موارد خاص از شرایط مرزی قابل حصول‌اند.
- کاربرد روش نگاشت همدیس را برای حفره‌ها و ترک‌ها مجاز می‌سازند.
- کاربرد روش عددی را امکان‌پذیر می‌کنند.

۱-۵ توابع تنش مختلط

تئوری متغیر مختلط یک ابزار بسیار قوی برای حل بسیاری از مسائل الاستیسیته را فراهم می‌کند و در عموم مسائل مهندسی از جمله مسائل صفحه‌ای، ترموالاستیسیته و مواد ناهمسانگرد کاربرد دارد. روش متغیر مختلط امکان حل بسیاری از مسائل به‌خصوص آن‌هایی که به روش‌معمولی قابل حل نیستند را فراهم می‌سازد. این روش بر اساس تبدیل مسأله الاستیسیته به فرمول‌بندی در ناحیه مختلط استوار است. در اینجا هدف معرفی اصول روش متغیر مختلط و کاربرد آن در مسائل خاص مهندسی می‌باشد.

میدان تنشی را در نظر بگیرید که از دو تابع $F(x,y)$ و $B(x,y)$ به‌دست آید، به‌طوری که:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y}$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \qquad (۱۰-۱)$$
$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

جاگذاری میدان تنش فوق در معادلات تعادل و سازگاری، روابط زیر را ارائه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F) - \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 B) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F) + \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 B) = 0 \qquad (۱۱-۱)$$

این معادلات شرایط کوشی-ریمان می‌باشند که تحلیلی بودن عبارت $\nabla^2 F + i\,\nabla^2 B$ را تضمین می‌کنند. با معرفی دو تابع تحلیلی $\phi(z)$ و $\psi(z)$ و ترکیب خاص آن‌ها، معادلات (۱-۱۱) قابل حل می‌باشند، طوری که:

$$F + iB = \bar{Z}\phi(z) + \int \psi(z)dz \qquad (۱۲-۱)$$