

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تئوری الاستیسیته و مدلسازی رفتار مواد

چن، وای - فا

ترجمه:

دکتر محمود یحیایی



شماره ۲۸۰

سرشناسه: چن، وای-فا، ۱۹۳۶ م. - Chen, Wai-Fah
عنوان و نام پدیدآور: تئوری الاستیسیته و مدل‌سازی رفتار مواد/ مولف وای-فا چن؛ ترجمه محمود یحیایی.
مشخصات نشر: تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، انتشارات، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری: ۴۴۲ص.
فروست: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی؛ ۲۸۰.

ISBN: 978-964-8703-94-8

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۸۷۰۳-۹۴-۸

وضعیت فهرست نویسی: فیپا.

یادداشت: کتاب حاضر ترجمه جلد اول کتاب Constitutive equations for engineering materials, 2nd. ed , 1994 تحت عنوان Elasticity and modeling است.

موضوع: آنالیز ارتجاعی (مهندسی)

سازه، تجزیه و تحلیل

تحلیل خمیری

شناسه افزوده: یحیایی، محمود، ۱۳۴۰ - مترجم

شناسه افزوده: تکنولوژی اطلاعات -- جنبه‌های اقتصادی

رده‌بندی کنگره: ۱۳۹۰ چ ۹ت ۹/۹۵۳/۹ TA۶۵۳

رده‌بندی دیویی: ۶۲۴/۱

شماره کتابشناسی ملی: ۲۴۱۰۶۷۱

press.kntu.ac.ir



ناشر: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

عنوان: تئوری الاستیسیته و مدل‌سازی رفتار مواد

مؤلف: چن، وای - فا

مترجم: دکتر محمود یحیایی

ویرایش: دوم

نوبت چاپ: دوم

تاریخ انتشار: دی ۱۴۰۲

شمارگان: ۲۰۰ جلد

چاپ و صحافی: آرمانسا

قیمت:

تمام حقوق برای ناشر محفوظ است

خیابان میرداماد غربی - شماره ۴۷۰ - انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تلفن: ۸۸۸۸۱۰۵۲

میدان ونک - خیابان ولی عصر (عج) - بالاتر از چهارراه میرداماد - شماره ۲۶۲۶ - مرکز پخش و فروش انتشارات

تلفن: ۸۸۷۷۲۲۷۷ رایانامه: press@kntu.ac.ir - تارنما (فروش برخط): press.kntu.ac.ir

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل ۱

بردارها و تانسورها

۱	
۱	۱-۱ مقدمه
۱	۲-۱ سیستم مختصات
۲	۳-۱ جبر بردارها
۴	۴-۱ ضرب عددی
۶	۵-۱ حاصلضرب برداری
۸	۶-۱ حاصلضرب سه بردار
۸	۷-۱ حوضه‌های برداری و عددی
۱۱	۸-۱ علائم اندیسی و قرارداد جمع کردن
۱۴	۹-۱ علامت δ_{ij} (دلتهای کرونیکر)
۱۵	۱۰-۱ علامت ε_{ijk} تانسور تناوبی
۲۱	۱۱-۱ انتقال محورها
۲۵	۱۲-۱ تعریف تانسور کارترین
۲۷	۱۳-۱ خاصیت تانسورها
۳۰	۱۴-۱ تانسورهای ایزوتروپیک
۳۱	۱۵-۱ قانون خارج قسمت
۳۲	۱۶-۱ مثال علائم اندیسی
۳۵	۱۷-۱ انتگرال سطح-حجم (قضیه انحراف)

فصل ۲

۳۷

آنالیز تنش

۳۷

۱-۲ مقدمه

۳۸

۲-۲ حالت تنش در یک نقطه

۴۶

۳-۲ فرمول های کاوشی برای تنش ها

۵۰

۴-۲ محورهای اصلی تنش

۵۸

۵-۲ مقادیر تنش های برشی و قائم

۶۳

۶-۲ حالت تنش برشی خالص

۶۵

۷-۲ تنش های هشت وجهی

۷۰

۸-۲ تانسور تنش انحرافی

۷۴

۹-۲ مقایسه دو حالت تنش

۷۵

۱۰-۲ نمایش نموداری موهر برای تنش ها

۸۶

۱۱-۲ نمایش هندسی تنش

۹۱

۱۲-۲ روابط تعادل

۹۴

مسائل آنالیز تنش

فصل ۳

۱۰۱

آنالیز کرنش

۱۰۲

۱-۳ مقدمه

۱۰۳

۲-۳ حالت کرنش در یک نقطه

۱۱۰

۳-۳ فرمول کاوشی برای کرنش

۱۱۳	۴-۳ کرنش‌های اصلی
۱۱۷	۵-۳ کرنش‌های هشت وجهی
۱۱۸	۶-۳ تانسور کرنش انحرافی
۱۲۱	۷-۳ نمایش نمودار موهر برای کرنش‌ها
۱۲۴	۸-۳ روابط کرنش-تغییر مکان
۱۳۱	۹-۳ روابط سازگاری کرنش
۱۳۳	مسائل آنالیز کرنش

فصل ۴

۱۳۵	روابط الاستیک تنش-کرنش
۱۳۵	۱-۴ مقدمه
۱۳۹	۲-۴ فرضیات اصولی
۱۳۹	۳-۴ نیاز به مدل‌های مواد الاستیک
۱۴۰	۴-۴ تعاریف
۱۴۳	۵-۴ روابط تنش - کرنش الاستیک خطی ایزوتروپیک (قانون عمومی هوک)
۱۴۴	۱-۵-۴ روابط تنش-کرنش الاستیک خطی
۱۴۹	۲-۵-۲ روابط تنش-کرنش الاستیک خطی در قالب ماتریس
۱۵۶	۶-۴ اصل کار مجازی
۱۶۲	۷-۴ چگالی انرژی کرنشی و سازگاری انرژی در مواد الاستیک
۱۶۷	۸-۴ روابط تنش-کرنش غیرایزوتروپیک، اورتوتروپیک و ایزوتروپیک جانبی خطی (گرین)

- ۱۶۸ ۱-۸-۴ مواد غیرایزوتروپیک (۲۱ ثابت)
- ۱۶۸ ۲-۸-۴ مواد ارتوتروپیک (۹ ثابت)
- ۱۷۰ ۳-۸-۴ مواد ایزوتروپیک جانبی (۵ ثابت)
- ۱۷۳ ۹-۴ روابط تنش- کرنش الاستیک غیرخطی
- ۱۷۳ ۱-۹-۴ روابط تنش- کرنش ایزوتروپیک غیرخطی بر مبنای
توابع Ω و W
- ۱۸۴ ۲-۹-۴ روابط تنش- کرنش الاستیک غیرخطی با استفاده از
اصلاح مدل‌های الاستیک خطی
- ۱۹۲ ۳-۹-۴ محدودیت‌های اعمال شده بر روی شکل تابعی از
مدول‌های الاستیک غیرخطی برای مستقل از مسیر
کردن Ω و W
- ۱۹۵ ۱۰-۴ یکتایی، پایداری، نرمالیت و تحدب برای مواد الاستیک
- ۱۹۵ ۱-۱۰-۴ یکتایی
- ۱۹۶ ۲-۱۰-۴ فرضیات پایداری
- ۲۰۱ ۳-۱۰-۴ محدودیت‌های اعمال شده بر فرضیات پایداری ماده
در روابط ساختاری الاستیک-نرمالیت و تحدب
- ۲۱۰ ۱۱-۴ روابط تنش- کرنش افزایشی (هیپوالاستیک) برای مواد
ایزوتروپیک
- ۲۱۰ ۱-۱۱-۴ فرمولاسیون کلی
- ۲۱۳ ۲-۱۱-۴ مشخصه‌ها
- ۲۱۴ ۱۲-۴ یک رابطه افزایشی بر اساس مدول سکانت
- ۲۲۳ ۱۳-۴ مدل‌های تنش- کرنش افزایشی با مدول متغیر
- ۲۲۳ ۱-۱۳-۴ تشریح مدل
- ۲۲۴ ۲-۱۳-۴ رفتارهای بارگذاری-باربرداری-بارگذاری مجدد
- ۲۲۷ ۳-۱۳-۴ مثال عددی

۲۳۱	۴-۱۳-۴ نتیجه گیری
۲۳۲	۴-۱۴ خلاصه
۲۳۶	مسائل روابط الاستیک تنش- کرنش
۲۴۳	مراجع

فصل ۵

	الاستیسیته خطی و معیارهای شکست بتن
۲۴۵	۱-۵ مقدمه
۲۴۶	۲-۵ رفتار مکانیکی بتن
۲۴۶	۵-۲-۱ کلیات
۲۴۸	۵-۲-۲ رفتار تک محوری
۲۵۳	۵-۲-۳ رفتار دو محوری
۲۵۵	۵-۲-۴ رفتار سه محوری
۲۵۸	۵-۳ معیارهای شکست
۲۵۹	۵-۳-۱ ثابتهای تنش
۲۶۷	۵-۳-۲ ثابتهای کرنش
۲۶۸	۵-۳-۳ مشخصات سطح شکست
۲۷۲	۵-۳-۴ مدل های شکست پیشنهادی برای بتن
۲۸۳	۵-۴ معیار شکست موهر-کلمب با قطع کشش
۲۸۳	۵-۴-۱ تعریف
۲۸۵	۵-۴-۲ شکل های شکست
۲۸۶	۵-۴-۳ رفتار پس از شکست
۲۸۸	۵-۴-۴ مزایا و محدودیتها

- ۲۸۸ ۵-۵ مدل شکست پنج پارامتری
- ۲۸۹ ۱-۵-۵ تقریب بیضی گون بخش انحرافی
- ۲۹۳ ۲-۵-۵ تنش های متوسط در طول نصف النهارهای کششی و فشاری
- ۲۹۴ ۳-۵-۵ خواص کلی سطح شکست
- ۲۹۵ ۴-۵-۵ تعیین پارامترهای مدل
- ۲۹۸ ۵-۵-۵ بررسی تجربی
- ۲۹۹ ۶-۵ مدل های شکست الاستیک خطی برای بتن
- ۲۹۹ ۱-۶-۵ کلیات
- ۳۰۰ ۲-۶-۵ ترک خوردگی بتن و مدلسازی ترک خوردگی بتن
- ۳۰۷ ۳-۶-۵ روابط تنش- کرنش برای بتن ترک نخورده
- ۳۱۲ ۴-۶-۵ معیارهای شکست
- ۳۱۵ ۵-۶-۵ روابط تنش- کرنش برای بتن ترک خورده
- ۳۲۳ ۷-۵ اصطلاحات بیشتر برای مدلسازی بتن گسیخته
- ۳۲۴ ۱-۷-۵ ضریب خرد شدگی
- ۳۲۶ ۲-۷-۵ رفتار پس از شکست بتن گسیخته شده
- ۳۳۰ ۸-۵ اثر متقابل بین بتن و فولاد (میلگردها)
- ۳۳۲ ۹-۵ مثالهایی از کاربرد المانهای محدود
- ۳۳۳ ۱-۹-۵ تحلیل شکست الاستیک خطی تیرهای بتن مسلح
- ۳۳۷ ۲-۹-۵ تحلیل یک استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی
- ۳۴۳ ۱۰-۵ خلاصه
- ۳۴۶ مراجع

فصل ۶

- ۳۵۳ الاستیسیته غیر خطی و مدل های هیپوالاستیک بتن
- ۳۵۳ ۱-۶ مقدمه
- ۳۵۴ ۲-۶ روشهای عمومی برای فرمولهای الاستیک غیر خطی تنش- کرنش
- ۳۵۵ ۱-۲-۶ فرمول کلی تنش-کرنش نوع کاوشی
- ۳۵۵ ۲-۲-۶ فرمول تنش-کرنش کلی نوع گرین (هیپوالاستیک)
- ۳۵۸ ۳-۲-۶ فرمول تنش-کرنش افزایشی نوع هیپوالاستیک
- ۳۶۰ ۳-۶ مدل های تنش و کرنش کل بر اساس تجزیه مدول سکانتی "G_s, K_s"
- ۳۶۰ ۱-۳-۶ کلیات
- ۳۶۲ ۲-۳-۶ مدول های سکانتی G_s و K_s بر اساس تنش ها و کرنش های هشت وجهی
- ۳۶۵ ۳-۳-۶ روابط تنش و کرنش افزایشی
- ۳۷۱ ۴-۳-۶ خلاصه و نتایج
- ۳۷۳ ۴-۶ مدل کمی تنش-کرنش بر اساس مدول های سکانت K_s و G_s
- ۳۷۳ ۱-۴-۶ تابع صحیح
- ۳۷۴ ۲-۴-۶ فرمول رابطه تنش-کرنش
- ۳۷۶ ۵-۶ مدل نهایی تنش-کرنش بر اساس مدول های سکانت E_s و U_s غیر مزدوج با در نظر گرفتن رفتار نرم شدگی (رفتار خمیری)
- ۳۷۶ ۱-۵-۶ کلیات
- ۳۷۶ ۲-۵-۶ شاخص غیر خطی

- ۳۷۹ ۳-۵-۶ مدول سکانت یانگ، E_s
- ۳۸۲ ۴-۵-۶ ضریب پواسون سکانت (ν_s)
- ۳۸۴ ۵-۵-۶ نتیجه گیری
- ۳۸۵ ۶-۶ مدل های کلی تنش- کرنش برای مواد کاوشی
- ۳۸۶ ۱-۶-۶ روابط تنش- کرنش کلی از نوع درجه دوم
- ۳۸۸ ۲-۶-۶ مدل ساختاری سکانت برای بتن تحت اثر بارهای
فشاری یکنواخت
- ۳۹۰ ۷-۶ مدل های افزایشی تنش- کرنش برای مصالح الاستیک
خطی ایزوتروپیک
- ۳۹۱ ۱-۷-۶ مدل های ایزوتروپیک با یک مدول متغیر مماسی (E_t)
- ۳۹۳ ۲-۷-۶ مدل های ایزوتروپیک در مدول متغیر مماسی G_t و K_t
- ۳۹۵ ۳-۷-۶ تعیین مدولهای مماسی تعمیم یافته $K_t(\sigma_{oct})$ و
 $G_t(\tau_{oct})$
- ۴۰۰ ۸-۶ مدل ارتوتروپیک افزایشی دو محوره برای بارگذاری
یکنواخت
- ۴۰۰ ۱-۸-۶ منحنی های تنش- کرنش دو محوری
- ۴۰۳ ۲-۸-۶ روابط تنش- کرنش ارتوتروپیک افزایشی
- ۴۰۶ ۹-۶ مدل اورتوتروپیک افزایشی برای بارگذاری سیکلی
مقدمه ۱-۹-۶
- ۴۰۶ ۲-۹-۶ فرم روابط ساختاری افزایشی
- ۴۰۸ ۳-۹-۶ کرنش تک محوری معادل
- ۴۱۰ ۱۰-۶ مثال هایی از کاربردهای روش اجزا محدود
- ۴۱۰ ۱-۱۰-۶ آنالیز یک مخزن تحت فشار بتنی پیش تنیده
- ۴۱۳ ۲-۱۰-۶ آنالیز یک پانل برشی بتن مسلح تحت بار یکنواخت و
سیکلی

۳-۱۰-۶ آنالیز یک آزمایش بیرون کشیدن

۴۱۶

۴۲۳

مراجع

مقدمه

در حل یک مسئله مکانیک جامدات در هر لحظه از زمان معادلات ذیل باید ارضاء شوند:

- ۱- معادلات تعادل یا حرکت
- ۲- شرایط هندسی یا سازگاری کرنش ها و تغییر مکانها
- ۳- قوانین ساختاری مواد یا روابط تنش-کرنش

از دیدگاه تعادل یا حرکت تنش ها در داخل یک جسم با نیروهای حجمی و نیروهای وارد بر سطح آن جسم باید با هم مرتبط شوند. سه معادله تعادل وجود دارد که با شش مؤلفه تانسور تنش برای یک محیط پیوسته باهم مرتبط اند. در مسائل خطی این معادلات شامل کرنش ها و تغییر مکان ها نمی شوند اما در مسائل غیرخطی اغلب این مؤلفه های سازگاری وجود دارند. در مسائل دینامیکی معادلات تعادل با معادلات حرکت جایگزین شده و شامل مشتق دوم تغییر مکان ها می شوند. این اولین مجموعه یا دستگاه معادلات است.

از شرایط سازگاری یا سینماتیکی، می توان کرنش های داخل جسم را با تغییر مکان های آن مرتبط نمود. شش معادله سینماتیکی وجود دارد که شش مؤلفه تانسور کرنش را در قالب سه مؤلفه تغییر مکان تعریف می کنند. این معادلات را روابط کرنش-تغییر مکان می نامند و دومین دستگاه معادلات را تشکیل می دهند.

طبعاً هر دو معادلات تعادل و معادلات سینماتیک مستقل از مواد تشکیل دهنده یک جسم می باشند. اثرات مواد در دستگاه معادلات سومی تعریف می شود که به آنها معادلات ساختاری می گویند. این معادلات روابط بین تنش ها و کرنش ها را تعریف می کنند. اگر این معادلات خطی باشند بعنوان قوانین هوک معروفند.

این شش مؤلفه تنش، شش مؤلفه کرنش و سه مؤلفه تغییر مکان با سه معادله تعادل، شش معادله سینماتیک و شش معادله ساختاری با یکدیگر مرتبط می شوند. این پانزده کمیت مجهول از پانزده معادله فوق اشاره تعیین می شوند.

همانطور که همه مهندسين عمران می دانند موادی نظیر فولاد، بتن، چوب، خاک و سنگ دارای رفتار الاستیک خطی در همه محدوده بارگذاری نمی باشند و در حقیقت رفتار واقعی این مواد پیچیده بوده و تحت شرایط مختلف رفتار متفاوتی دارند. لذا برای کاربردهای مختلف باید

فرضیاتی را در نظر گرفت تا مدل ریاضی مناسبی را بوجود آورد. هیچ مدل ریاضی واحدی را نمی توان برای تعریف این رفتار پیچیده آنها بدست آورد. هر یک از مدل های رفتاری مواد در برگیرنده پدیده های معینی است که پارامترهای کم اهمیت تر را ندیده می گیرد. برای مثال قانون هوک در مهندسی سازه و ژئوتکنیک برای تعریف رفتار کلی سازه و خاک تحت بارگذاری کوتاه مدت بطور وسیعی استفاده می شود، اما نمی تواند رفتار یک سازه یا اندرکنش سازه-خاک را در شرایط مقاومت نهائی پیش بینی نماید زیرا تغییر شکل های پلاستیک در این سطح از بارگذاری حاکم می شود در حالیکه تغییر شکل های الاستیک از اهمیت کمتری برخوردار است. کتاب حاضر می تواند در مهندسی سازه و ژئوتکنیک و مواد در سطح کارشناسی ارشد و دکترا در مهندسی عمران و مکانیک مواد مورد استفاده قرار گیرد.

پیشگفتار

کتاب حاضر عمدتاً ترجمه ای است از کتاب چن که چهار فصل اول آن از سال ۱۳۷۵ در درس تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته برای دوره کارشناسی ارشد سازه و سازه های هیدرولیکی در دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی توسط اینجانب تدریس می شود. قبل از آن مراجع دیگری که عمدتاً بر مبنای روش کلاسیک تیموشنکو بود استفاده می شد. مزیت این کتاب بحث تئوری الاستیسیته بطور کامل در محدوده خطی و غیرخطی بدون استفاده از فرمولهای زیاد و افزون بر اطلاعات معمول مهندسی سازه در ریاضیات بوده و همچنین ایجاد زمینه و زیربنای لازم برای کاربرد اجزای محدود می باشد. تئوری و رفتار بتن در محدوده الاستیک غیرخطی و تئوریهای شکست این مصالح به تفصیل ارائه شده است. نتایج تحقیقات و مدل‌های ساختاری مربوط به فولاد و بتن تا سالهای اخیر نیز گزارش شده است. بخشی از هدف این کتاب بحث روش های جدید مدل‌های ساختاری مهندسی مواد بر پایه تئوری الاستیسیته و بخش دیگر بر ارائه تکنیک های آسان و فشرده مدلسازی ریاضی برای رفتار مواد در آنالیز اجزای محدود برای مهندسين عمران بطور عام و مهندسين سازه و مواد بطور خاص می باشد.

برخود لازم می دانم از کلیه دانشجویانی که در تهیه این کتاب نقش داشته اند سپاسگزاری نمایم. از این میان از تلاشهای آقایان مهندس علی مشیری و مهندس حامد زنگانه در بازخوانی متن و فرمول ها و تهیه شکل ها کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از هرگونه تذکر یا پیشنهاد در جهت رفع نواقص و اشتباهات موجود صمیمانه استقبال می شود. همچنین از زحمات مسئولین و کلیه پرسنل انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی سپاسگزاری نمایم.

محمود یحیائی

پاییز ۱۳۸۴

فصل ۱

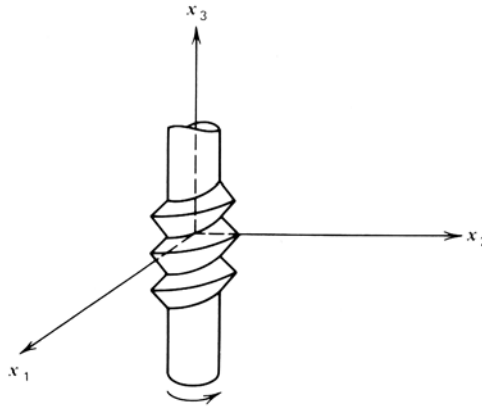
بردارها و تانسورها

۱-۱ مقدمه

استفاده از علائم برداری و تانسوری در ادبیات جاری زمانیکه صحبت از تنش، کرنش و معادلات ساختاری می‌شود، بسیار مرسوم است. بنابراین اطلاعات اولیه و پایه از این علائم برای نمایش خواص واقعی و درست مصالح بکار رفته، لازم است. برتری و حسن چنین علائمی بر شکل بسط یافته فرمولها در آن است که فرمولها بصورت کوتاه و خلاصه نوشته می‌شود و بجای آنکه توجه و وقت صرف نوشتن فرمولها شود به اصول و مبانی فیزیکی روابط توجه خواهد شد. مطالبی که در ذیل می‌آید صرفاً به کاربرد بردارها و تانسورها در تنش و کرنش و روابط آنها در محدوده خطی و غیرخطی، محدود می‌شود.

۲-۱ سیستم مختصات

در حال حاضر ما خود را به سیستم کارترین محدود می‌کنیم. در فضای سه بعدی سیستم محورهای مختصات کارترین بصورت سه محور عمود بر هم x_1, x_2, x_3 نشان داده می‌شوند. برای ساده کردن آنها را می‌توان بصورت x_1, x_2, x_3 نشان داد. همچنان که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است با استفاده از قانون دست راست محورهای x_2 و x_3 در داخل صفحه کاغذ قرار می‌گیرند و محور x_1 بسمت خواننده رسم می‌شود.



شکل ۱-۱ علامت پیچ دست راست

در این علامت، محورها موازی هستند که بترتیب: انگشت وسط بطرف بیننده، شست بطرف راست و انگشت سبابه بطرف بالا می‌باشند.

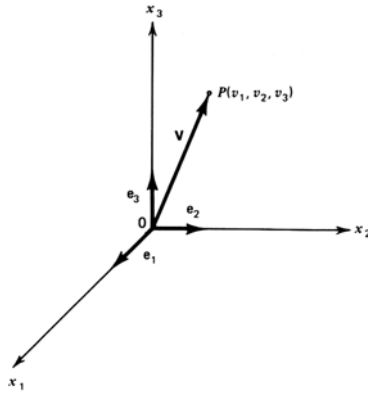
جهت مثبت در شکل (۱-۱) نشان داده شده است. اگر ما یک پیچ راست گرد را در نظر بگیریم، چرخش محور x_1 بطرف محور x_2 یک حرکت مثبت است حول محور x_3 . حرکت مشابه در جهت مثبت با انتخاب دوره‌ای اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ امکان‌پذیر است.

به همین دلیل شکل (۱-۱) را سیستم مختصات دست راست می‌نامند. اگر محور x_3 را بطرف پائین علامت بگذاریم به آن سیستم مختصات دست چپ می‌گویند. توجه شود که دو سیستم مختصات راست گرد که دارای یک مرکز می‌باشند را می‌توان چرخاند تا محورهای آنها بر روی یکدیگر منطبق گردند. این قانون برای دو سیستم مختصات چپ گرد نیز صادق است. در این کتاب ما از سیستم (قانون) دست راست استفاده خواهیم نمود.

۳-۱ جبر بردارها

یک بردار کمیتی است که دارای بزرگی و جهت است برخلاف یک عدد که فقط بزرگی دارد. به عنوان مثال سرعت یک بردار است و درجه یک عدد. معمولاً بردار را با یک پیکان نمایش می‌دهند که در جهت یک بردار که طولش متناسب با بزرگی آن است، رسم می‌شود.

بردارهای e_1 ، e_2 ، e_3 در شکل (۲-۱) در امتداد سه محور عمود بر هم رسم شده‌اند. برداری که e_1 ، برای مثال دارای طول واحد (که از مرکز اندازه گرفته شده است) می‌باشد و در امتداد محور x_1 قرار دارد. بنابراین e_1 الزاماً عمود بر محور x_2 و x_3 است.



شکل ۱-۲ موقعیت و بردارهای یکه در محورهای مختصات کارترین

نقطه‌ای دلخواه مانند P در فضا با مختصات v_3, v_2, v_1 را می‌توان با بردار OP یا V نشان داد. بردار V ممکن است بصورت ترکیبی از بردارهای V_1, V_2, V_3 دانست بنابراین:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (1-1)$$

و یا در قالب بردارهای یکه:

$$V = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \quad (2-1)$$

که در این رابطه v_3, v_2, v_1 مقادیر عددی می‌باشند. رابطه بالا را می‌توان بصورت ساده و خلاصه زیر نوشت:

$$V = (v_1, v_2, v_3) \quad (3-1)$$

ترتیب ضرایب عددی در شکل فوق بوضوح از اهمیت زیادی برخوردار است.

این موضوع از تشابه بسیار نزدیک علامت بردار V با نقطه P در مختصات کارترین قابل ادراک است.

معمولاً V_1, V_2, V_3 مؤلفه‌های V و یا برعکس بردار V پس از تجزیه به مؤلفه‌های فوق تبدیل می‌شود. نقطه‌ای که بردار بر آن وارد می‌شود معمولاً قابل درک است و لازم نیست که بطور جداگانه تعریف و یا مشخص شود. در شکل (۲-۱) بردار V بطور اتفاقی بر مرکز مختصات وارد شود.

بردارهای V و U زمانی مساوی می‌باشند که مؤلفه‌های آنها تک تک با یکدیگر برابر باشند. به عبارت دیگر شرط برابری دو بردار بصورت زیر است:

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2 \quad , \quad v_3 = u_3 \quad (4-1)$$

۴ بردارها و تانسورها

و یا بطور خلاصه:

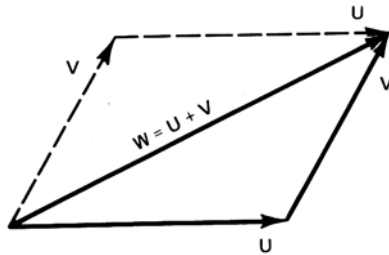
$$v_i = u_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5-1)$$

در کل برابری با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$v_i = u_i \quad (6-1)$$

چون اندیس، مشخص نشده است، رابطه باید برای تمام مقادیر ممکن اندیس صادق باشد. اگر بردار V در یک عدد مثل α ضرب شود، با بردار جدیدی تعریف می‌گردد که روی همان بردار منطبق و در همان جهت است، اما بزرگی آن α برابر شده است. اگر α منفی باشد جهت بردار عوض می‌شود.

جمع دو بردار U و V بر طبق قانون متوازی الاضلاع تعریف می‌شود که در شکل (۳-۱) نشان داده شده است.



شکل ۳-۱ جمع بردار

جمع دو بردار U و V و یا تفریق آنها بدینگونه است که عملیات جمع و یا تفریق بر روی مؤلفه‌های آنها انجام می‌گیرد.

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \pm \mathbf{V} = (u_1 \pm v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 \pm v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 \pm v_3)\mathbf{e}_3 \quad (7-1 \text{ الف})$$

در قالب مؤلفه‌ها:

$$(w_1, w_2, w_3) = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, u_3 \pm v_3) \quad (7-1 \text{ ب})$$

در قالب اندیسی:

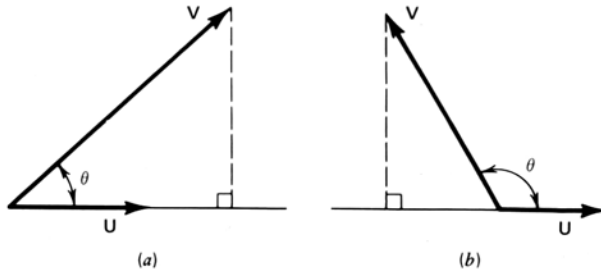
$$w_i = u_i \pm v_i \quad (8-1)$$

۴-۱ ضرب عددی

دو نوع ضرب برای بردار وجود دارد، ضرب عددی (یا داخلی) و ضرب برداری. در ضرب اول عدد در بردار ضرب می‌شود و در دومی بردار در بردار. در این قسمت به ضرب عددی می‌پردازیم. ضرب عددی دو بردار U و V بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{U}| |\mathbf{V}| \cos \theta \quad (9-1)$$

که $|\mathbf{U}|$ مقدار مطلق طول بردار \mathbf{U} و θ زاویه صفحه‌ای و یا زاویه بین دو بردار \mathbf{U} و \mathbf{V} که در صفحه آنها اندازه گیری شده است، می باشد.



شکل ۴-۱ ضرب عددی بردارها

اگر یکی از بردارها، بردار یکه باشد؛ ضرب داخلی، طول تصویر بردار دیگر را در جهت بردار یکه نشان می دهد. برای مثال اگر $|\mathbf{U}| = 1$ باشد، $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{V}| \cos \theta$ که تصویر \mathbf{V} در جهت \mathbf{U} است.

در مواقع استثنائی بردارهای یکه‌ای که در امتداد محورهای مختصات باشند، بصورت زیر نوشته می شوند.

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = (1)(1) \cos 0^\circ = 1 \quad (10-1)$$

و نیز

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = (V)(V) \cos 0^\circ = V^2 \quad (11-1)$$

اگر V طول مطلق بردار \mathbf{V} باشد می توان از مطالب بالا نتایج زیر را بدست آورد:

۱- حاصلضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفر است. نتیجتاً اگر ضرب دو بردار صفر باشد آنها بر یکدیگر عموداند.

۲- مجذور طول یک بردار را می توان با ضرب داخلی آن بردار در خودش بدست آورد.

۳- تصویر یک بردار در جهت دیگری بغیر از جهت خودش را می توان از حاصلضرب داخلی بردار در یک بردار یکه در امتداد مورد نظر بدست آورد.

حاصلضرب عددی دو بردار ممکن است بصورت زیر نوشته شود.