آنالیز تنسوری تغییر شکل با رویکرد ژئودزی و ژئودینامیک

مولفان:

بهزاد وثوقی (دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی ژئودزی و ژئوماتیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی)

میر رضا غفاری رزین

شماره ۵۰۰

سرشناسه: وثوقی، بهزاد، ۱۳۴۳ -
عنوان و نام پدیدآور: آنالیز تنسوری تغییر شکل با رویکرد ژئودزی و ژ ئودینامیک/ مولفان بهزاد وثوقی، میررضا غفاری رزین.
مشخصات نشر: تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الد ین طوسی، انتشارات، .۱۳۹۹
مشخصات ظاهری: ۱۸۴ص.: مصور.
فروست: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی؛ .۵۰۰
شابک چاپی: ۶-۷۳-۶۶۵۵-۶۲۲-۹۷۸
شابک الکترونیکی: ۱-۱۲-۱۴۵۰-۶۲۲-۹۷۸
وضعییت فهرست نویسی: فیپا
یادداشت: مفاهیم تنسوری در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. یکی از زمینه‌های بسیار پرکاربرد آنالیز تنسوری مربوط به مبحث مکانیک محیط‌های پیوسته است. برخی از نمونه‌های مشهور تنسور در هندسه دیفرانسیل، فرم‌های درجه دوم مانند تنسور متریک و تنسور انحنای ریمانی هستند.
یادداشت: کتابنامه.
موضوع: تانسورها حساب -- آموزشی راهنمای -- Calculus of tensors -- Study and teaching /
موضوع: ژئودزی -- ر یاضیات -- راهنمای آموزشی/ teaching and Study -- Mathematics -- Geodesy
موضوع: ژئود ینامیک -- ریاضیات -- راهنمای آموزشی/ teaching and Study -- Mathematics -- Geodynamics
شناسه افزوده: غفاری رز ین، میررضا، ۱۳۶۳ -
رده بندی کنگره: QA۴۳۳
رده بندی دیویی: ۸۳/۵۱۶
شمار ه کتابشناسی ملی: ۷۵۴۲۱۹۱

ناشر: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی **press.kntu.ac.ir**

عنوان: آنالیز تنسوری تغییر شکل با رویکرد ژئودزی و ژئودینامیک
مؤلف: بهزاد وثوقی ،میررضا غفاری رزین.
نوبت چاپ: اول
تاریخ انتشار: اسفند ۱۳۹۹
شمارگان: ۲۰۰ جلد
ویرایش: ویراستار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
چاپ‌وصحافی: گرنامی
قیمت: ۳۳۰,۰۰۰ تومان

تمام حقوق برای ناشر محفوظ است

خیابان میرداماد غربی– شماره ۴۷۰– انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی – تلفن: ۸۸۸۸۱۰۵۲
میدان ونک – خیابان ولی‌عصر(عج) – بالاتر از چهارراه میرداماد – شماره ۲۶۲۶– مرکز پخش و فروش انتشارات
تلفن: ۸۸۷۷۲۲۷۷ رایانامه: press@kntu.ac.ir – تارنما (فروش برخط): press.kntu.ac.ir

فهرست مطالب

فصل اول **۱**

۱-۱ تنسور و مفهوم آن **۲**

۱-۲ مکانیک محیط‌های پیوسته **۳**

۱-۲-۱ ویژگی‌های اساسی مدل یا محیط پیوسته ۴

۱-۳ سیستم‌های مختصات در ژئودزی **۵**

۱-۳-۱ مختصات ۶

۱-۳-۲ سیستم مختصات ۶

۱-۳-۳ سیستم مختصات کارتزین متعامد دو بعدی ۷

۱-۳-۴ سیستم مختصات قطبی ۸

۱-۳-۵ سیستم مختصات کارتزین متعامد سه‌بعدی ۹

۱-۳-۶ سیستم مختصات منحنی‌الخط ۱۲

۱-۳-۶-۱ سیستم مختصات منحنی‌الخط کروی ۱۲

۱-۳-۶-۲ سیستم مختصات منحنی‌الخط ژئودزی ۱۴

۱-۴ بردارهای پایه در سیستم مختصات منحنی‌الخط **۲۰**

۱-۴-۱ المان طولی دیفرانسیلی ۲۳

۱-۴-۲ المان حجمی دیفرانسیلی ۲۴

۱-۵ بیان ریاضی عملگرهای گرادیان، دیورژانس، کرل و لاپلاسین در یک سیستم مختصات منحنی‌الخط **۲۵**

۱-۵-۱ گرادیان ۲۵

۱-۵-۲ دیورژانس ۲۷

۱-۵-۳ کرل ۲۸

۱-۵-۴ لاپلاسین ۲۹

تمرینات فصل اول **۳۱**

فصل دوم **۳۳**

۲-۱ جبر و آنالیز برداری **۳۳**

۲-۱-۱ فیلد (میدان) ۳۴

۲-۱-۲ فضای برداری ۳۴

۲-۱-۳ فضای اقلیدسی ۳۶

۲-۱-۴ میدان برداری ۳۷

۲-۱-۵ میدان اسکالر ۳۸

۲-۱-۶ میدان تنسوری ۳۸

۲-۲ جبر بردارها **۳۹**
۲-۲-۱ بردار صفر ۳۹
۲-۲-۲ بردار یکه ۳۹
۲-۲-۳ جمع دو بردار ۳۹
۲-۲-۴ قرینه بردار ۴۰
۲-۲-۵ ضرب داخلی یا اسکالر ۴۱
۲-۲-۶ ضرب خارجی یا برداری ۴۲
۲-۲-۷ ضرب مخلوط ۴۴
۲-۳ معادلات برداری **۴۵**
۲-۴- تبدیل سیستم‌های مختصات **۴۵**
۲-۵ آنالیز برداری **۴۶**
۲-۵-۱ مشتق تابع برداری یک متغیره و دو متغیره ۴۶
۲-۶ هندسه دیفرانسیل خم‌ها یا منحنی‌ها **۴۸**
۲-۷ هندسه سطوح یا رویه‌ها **۵۳**
۲-۸ انحنای ژئودزی- خم ژئودزی **۵۶**
۲-۹ مشتق میدان‌های اسکالر و برداری **۵۶**
تمرینات فصل دوم **۵۸**
فصل سوم **۵۹**
۳-۱ بردارها در سیستم‌های مختصات کارتزین نامتعامد دوبعدی **۵۹**
۳-۱-۱ قرارداد جمع ۶۲
۳-۲ بردارهای پایه در سیستم‌های مختصات کارتزین نامتعامد سه‌بعدی **۶۴**
۳-۳ بردارها در سیستم‌های مختصات منحنی‌الخط **۶۶**
۳-۳-۱ مختصات‌های کووریانت و کنتراوریانت در سیستم مختصات منحنی‌الخط ۶۶
تمرینات فصل سوم **۷۱**
فصل چهارم **۷۳**
۴-۱ تعریف ریاضی تنسور **۷۳**
۴-۲ بیان ماتریسی تنسورهای مرتبه دو **۷۶**
۴-۳ میدان‌های تنسوری **۷۷**
۴-۴ جبر تنسورها **۷۸**
۴-۴-۱ تنسور صفر ۷۸
۴-۴-۲ دلتای کرونکر ۷۸

۴-۴-۳ نماد Permutation و تنسور آن ۷۹
۴-۴-۴ جمع تنسورها ۸۲
۴-۴-۵ ضرب تنسورها ۸۲
۴-۴-۵-۱ ضرب داخلی تنسورها ۸۲
۴-۴-۵-۲ ضرب خارجی تنسورها ۸۳
۴-۴-۵-۳ ضرب دیادیک یا تنسوری ۸۳
۴-۴-۶ ترانهادهٔ یک تنسور ۸۵
۴-۴-۷ تریس یک تنسور ۸۵
۴-۴-۸ انقباض ۸۶
۴-۴-۹ دترمینان و وارون یک تنسور ۸۷
۴-۴-۱۰ تنسور متعامد ۸۸
۴-۵ ویژگی‌های تنسوری ۸۹
۴-۶ تنسورهای متقارن و پادمتقارن ۸۹
۴-۷ تنسور تصویر ۹۰
۴-۸ مقادیر و بردارهای ویژه یک تنسور ۹۱
۴-۹ تنسور متریک (فرم اساسی مرتبه اول سطح) ۹۲
۴-۹-۱ فرم اساسی مرتبه دوم ۹۶
۴-۱۰ عملیات بالا بردن و پایین آوردن اندیس‌های یک تنسور ۹۸
۴-۱۱ طول یک بردار و زاویه بین بردارها ۹۹
۴-۱۲ تنسورهای انتقال‌دهنده ۱۰۰
۴-۱۳ تنسورهای مراتب بالاتر ۱۰۱
تمرینات فصل چهارم ۱۰۳
فصل پنجم ۱۰۹
۵-۱ محاسبات تنسوری ۱۰۹
۵-۱-۱ نمادهای کریستوفل ۱۱۰
۵-۱-۲ حالت‌های کلی برای منحنی‌ها در سیستم‌های کارتزین و قطبی ۱۱۴
۵-۱-۳ خم ژئودزیک و ارتباط آن با نمادهای کریستوفل ۱۱۶
۵-۲ مشتق کووریانت ۱۱۶
۵-۴ شکل تنسوری گرادیان، دیورژانس و کرل ۱۱۸
تمرینات فصل پنجم ۱۲۲
فصل ششم ۱۲۵

۶-۱ سیستم‌های مختصات لاگرانژی و اولری **۱۲۵**
۶-۲ معادلات حرکت **۱۲۶**
۶-۳ بردارهای پایه و تنسورهای متریک در دو وضعیت مرجع و حاضر **۱۲۷**
۶-۴ تنسورهای تغییر شکل کوشی و گرین **۱۲۸**
۶-۵ تنسور تغییر شکل کرنش لاگرانژی و کرنش اولری **۱۳۰**
۶-۶ بردار جابه‌جایی **۱۳۲**
۶-۷ تنسورهای کرنش بی‌نهایت کوچک و تنسورهای دوران بی‌نهایت کوچک **۱۳۵**
۶-۸ معیارهای اسکالر مستخرج از تنسورهای تغییر شکل **۱۳۹**
۶-۸-۱ معیار عددی کشیدگی ۱۳۹
۶-۸-۲ معیار عددی کشش ۱۴۰
۶-۸-۳ معیار عددی انبساط طولی ۱۴۱
۶-۸-۴ معیار عددی برش ۱۴۲
۶-۹ کمّیت‌های ناوردای کرنش **۱۴۳**
۶-۹-۱ قضیهٔ دوم کوشی ۱۴۳
۶-۹-۲ کمیت‌های ناوردای مستخرج از تنسورهای تغییر شکل به‌عنوان معیارهای تغییر شکل ۱۴۶
۶-۹-۲-۱ اتساع ۱۴۷
۶-۹-۲-۲ برش محض و برش ساده ۱۴۷
۶-۱۰ کرنش صفحه‌ای **۱۴۸**
۶-۱۱ آنالیز کرنش صفحه‌ای **۱۵۳**
۶-۱۲ کاربردهای آنالیز کرنش صفحه‌ای در ژئودزی و ژئودینامیک **۱۵۵**
۶-۱۲-۱ آنالیز تغییر شکل سطح زمین ۱۵۵
۶-۱۲-۲ در موضوع سیستم‌های تصویر ۱۵۵
۶-۱۲-۳ آنالیز تغییر شکل سازه‌های مهندسی ۱۵۶
تمرینات فصل ششم **۱۵۷**
فصل هفتم **۱۵۹**
۷-۱ استخراج معادلات تنسور کرنش با استفاده از هندسه ذاتی جسم **۱۵۹**
۷-۲ بررسی تغییر شکل میدان ثقل زمین **۱۶۶**
تمرینات فصل هفتم **۱۶۹**
منابع و مراجع **۱۷۱**

پیشگفتار مؤلفان

آنالیز تغییر شکل تنسوری یکی از دروس بسیار مهم و اساسی در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی ژئودزی است که هدف از ارائهٔ آن آشنایی دانشجویان با مفاهیم بردارها و تنسورها و همچنین کاربرد آنها در ژئودزی می‌باشد. مفاهیم تنسورها و همچنین محاسبات تنسوری در مباحث مرتبط با مکانیک محیط‌های پیوسته و مطالعات ژئودینامیکی کاربرد بسیاری دارد. گستردگی مطالب و مفاهیم موجود در جبر تنسورها و همچنین کاربردهای آن در علوم مختلف باعث شده است که منابع بسیار غنی و علمی به زبان انگلیسی نگاشته شده و در اختیار محققین قرار گیرد. متاسفانه، علی‌رغم کاربرد فراوانی که محاسبات تنسوری در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی بالاخص رشته مهندسی ژئودزی دارد؛ منابع فارسی مناسب، کاربردی و قابل فهم در این زمینه نگاشته نشده است. همین امر مؤلفان را بر آن داشت که با استفاده از تجربهٔ چندین‌سالهٔ خود در تدریس و به‌کارگیری مفاهیم تنسوری در مباحث مهندسی ژئودزی، مکانیک محیط‌های پیوسته و ژئودینامیک، کتاب حاضر را بنگارند. تجربهٔ نزدیک به دو دههٔ یکی از مؤلفان کتاب در تدریس درس آنالیز تنسوری تغییر شکل و همچنین استفادهٔ کاملاً عملی از آن در مباحث ژئودینامیکی باعث شده که مطالب کتاب با دقت و وسواس خاصی انتخاب و نگاشته شود. مطالب کتاب حاضر از چندین جهت قابل تأمل است: نکتهٔ اول اینکه مجموعهٔ حاضر اولین کتاب فارسی در زمینهٔ آنالیز تنسوری است که به‌صورت کاملاً تخصصی به کاربردهای آن در مهندسی ژئودزی و ژئودینامیک پرداخته است. نکتهٔ دوم این‌که مطالب ارائه شده در فصول مختلف کتاب با زبانی بسیار ساده و قابل فهم نگاشته شده و از بیان جزئیات و مفاهیم بسیار پیچیده‌ای که بعضاً در مباحث تنسوری وجود دارد پرهیز شده است. بایستی اشاره شود که جهت درک بیشتر و بهتر موضوعات مطرح شده در هر فصل، مثال‌های متنوعی متناسب با موضوعات مختلف کتاب حل شده و همچنین در انتهای هر فصل، تمریناتی نیز جهت تمرین و تکرار بیشتر، ارائه شده است.

مطابق با سرفصل درس آنالیز تغییر شکل تنسوری در دورهٔ کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی ژئودزی، این کتاب در هفت فصل تنظیم و نگاشته شده است. فصل اول با عنوان «مفاهیم اولیه و سیستم‌های مختصات» مقدماتی در مورد تنسور و کاربردهای آن ارائه شده و سپس در ادامهٔ فصل، مفاهیم مرتبط با سیستم‌های مختصات در ژئودزی و پارامترهای مورد نیاز در یک سیستم مختصات به‌صورت کامل شرح داده شده است. فصل دوم با عنوان «جبر و آنالیز برداری» به بررسی مفاهیم آنالیز بردارها، هندسهٔ دیفرانسیل خم‌ها و سطوح پرداخته است. در فصل سوم با عنوان « بردارها در سیستم‌های مختصات نامتعامد»، مختصات‌های کووریانت و کنتراوریانت یک بردار معرفی و قوانین تبدیل بین سیستم‌های مختصات ارائه شده است. فصول چهارم و پنجم با عناوین «تنسور و روابط ریاضی» و «محاسبات تنسوری» به‌صورت کاملی به بحث در مورد مفاهیم تنسوری پرداخته و محاسبات مختلف موجود در تنسورها را شرح می‌دهد. سرانجام دو فصل ششم و هفتم با عناوین «تنسورهای تغییر شکل» و «کاربردهای آنالیز تنسوری در ژئودزی و ژئودینامیک» به نحوهٔ

استفاده از مفاهیم تنسوری در آنالیز تغییر شکل پرداخته و کاربردهای آن را به‌صورت کاملی شرح می‌دهد.

تجربه نشان داده است هر نوشته‌ای حتی به‌صورت دقیق، خالی از اشتباه و خطا نخواهد بود. طبیعتاً کتاب حاضر نیز از این قاعده مستثنی نیست و با وجود دقت بسیار زیادی که در نگارش آن شده است؛ باز هم دارای ایراد و اشکال خواهد بود. لذا از تمامی استادان، دانشجویان، محققان و پژوهشگران عرصهٔ مهندسی نقشه‌برداری کشور درخواست می‌گردد تا نظرات و انتقادات سازندهٔ خود را به سمع و نظر نگارندگان برسانند تا در ویرایش‌های بعدی مد نظر قرار گیرد. در پایان بر خود لازم می‌دانیم از تمامی استادان، دوستان و همکارانی که در نگارش و ویرایش این کتاب به ما کمک و یاری رساندند، به‌ویژه عزیزانی که اساس مطالب این کتاب را از محضر آنان آموخته‌ایم تشکر و قدردانی نماییم.

بهزاد وثوقی، میررضا غفاری رزین- زمستان ۱۳۹۹
vosoghi@kntu.ac.ir, mr.ghafari@arakut.ac.ir

مقدّمه

در ریاضیات، تنسور یک مفهوم هندسی است که جهت بیان بردارها، اسکالرها و ماتریس‌ها در فضاهای ریاضی مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. بردارها و اسکالرهایی که اغلب در مسائل مربوط به فیزیک و علوم مهندسی کاربرد دارند، به‌عنوان ساده‌ترین تنسورها در نظر گرفته می‌شوند. با در نظر گرفتن بردارها به‌عنوان مرجع، یک تنسور می‌تواند به‌صورت یک آرایهٔ چندبعدی چندگانه از مقادیر عددی ارائه شود. مرتبهٔ یک تنسور، ابعاد آرایه‌ای است که مورد نیاز برای نشان دادن آن است، یا بطور معادل، مرتبهٔ یک تنسور تعداد اندیس‌هایی است که برای مشخص نمودن اجزای آن آرایه مورد نیاز است. یک بردار به‌عنوان یک آرایه یک بعدی در یک پایه ارائه می‌شود و یک تنسور مرتبه اول است. همچنین اسکالرها اعداد منفرد هستند و در نتیجه تنسورهای مرتبهٔ صفر را مشخص می‌کنند. بنابراین مجموعه‌ای از تنسورها بر روی یک فضای برداری، جبر تنسوری را تشکیل می‌دهند.

مفاهیم تحلیل تنسوری بعد از کار کارل فریدریش گاوس[1] در هندسهٔ دیفرانسیل به‌وجود آمد و فرمول‌بندی ریاضی آن بسیار تحت تأثیر تئوری اشکال جبری و متغیرهای توسعه یافته در اواسط قرن نوزدهم بود. کلمهٔ تنسور برای اولین بار در سال ۱۸۴۶ توسط ویلیام روان همیلتون[2] برای توصیف چیزی متفاوت از آنچه که در حال حاضر به معنای یک تنسور مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی شد. محاسبات تنسوری در سال ۱۸۹۰ و با نام محاسبات دیفرانسیلی مطلق توسط ریچی[3] آغاز شد و در سال ۱۸۹۲ به‌صورت کامل مورد استفاده قرار گرفت. در قرن بیستم موضوع تنسور به‌صورت مباحث آنالیز تنسوری مورد مطالعه قرار گرفت و با معرفی نظریهٔ نسبیت عام انشتین مورد اقبال بسیار زیاد دانشمندان واقع شد. بعدها دانشمندی بنام لوی-سویتا[4] اشتباهات موجود در مباحث تنسوری نظریهٔ عام انشتین را برطرف نمود.

مفاهیم تنسوری در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. یکی از زمینه‌های بسیار پرکاربرد آنالیز تنسوری مربوط به مبحث مکانیک محیط‌های پیوسته است. برخی از نمونه‌های مشهور تنسور در هندسهٔ دیفرانسیل، فرم‌های درجه دوم مانند تنسور متریک و تنسور انحنای ریمانی هستند. از سال ۱۹۲۰ به بعد دانشمندان به کاربرد تنسورها در توپولوژی جبری پی بردند. از آن تاریخ به بعد تنسورها نقش اساسی در محاسبات مختلف هندسی و ریاضی ایفا می‌کنند.

---

[1] Johann Carl Friedrich Gauss
[2] William Rowan Hamilton
[3] Gregorio Ricci-Curbastro
[4] Tullio Levi-Civita

فصل اول

مفاهیم اولیه و سیستم‌های مختصات

تنسور[1] عنصری هندسی است که در ریاضی و فیزیک به‌منظور گسترش مفاهیم اسکالرها، بردارها و ماتریس‌ها به ابعاد بالاتر معرفی می‌شوند. تنسورها اولین بار توسط تولیو لوی-چیویتا[2] و گرگریو ریچی- کورباسترو[3] ابداع شدند. در واقع کار آن‌ها ادامه کارهای برنهارت ریمان[4] و الوین برونو کریستوفل[5] و دیگران در حساب دیفرانسیل مطلق بود. در بسیاری از مباحث ریاضی، فضای محاسباتی، به گونه‌ای است که امکان تعریف یک سیستم مختصات کارتزین در آنها وجود ندارد، یا محاسبات ریاضی نسبت به این سیستم‌های مختصات دشوار می‌باشد؛ لذا در این‌گونه موارد، مانند محاسبات روی سطح بیضوی یا کره، نیازمند تعریف سیستم مختصات منحنی‌الخط[6] می‌باشیم. در این گونه فضاها امکان تعیین اینکه یک کمّیت بردار است یا نه، معمولاً مشکل است، حال آنکه قوانین تبدیل مؤلفه‌های یک بردار از یک سیستم مختصات به دیگری، امکان این تشخیص را برای ما فراهم می‌کند. در این نگرش بردارها به‌عنوان یک سه‌تایی از توابع که براساس قوانین تبدیل خاص، از یک سیستم به سیستم دیگری تبدیل می‌شوند، تعریف می‌گردند. این نگرش به ما اجازه می‌دهد که مفهوم بردار را تعمیم داده و ساختار کلی‌تری را به نام تنسور تعریف کنیم.

---

[1] Tensor
[2] Tullio Levi-Civita
[3] Gregorio Ricci-Curbastro
[4] Georg Friedrich Bernhard Riemann
[5] Elwin Bruno Christoffel
[6] Curvilinear coordinate system

۱-۱ تنسور و مفهوم آن

در ریاضیات، تنسورها عناصری هندسی هستند که رابطهٔ خطی بین بردارهای هندسی، اسکالرها و دیگر تنسورها را توصیف می‌کنند. نمونه‌های اولیه این روابط عبارتند از ضرب نقطه‌ای، ضرب برداری و تبدیلات خطی. بردارهای هندسی و اسکالرها به‌عنوان نمونه‌هایی از تنسورهای اولیه هستند. با در نظر گرفتن بردارها به‌عنوان مرجع، یک تنسور می‌تواند به‌عنوان یک آرایهٔ چندبعدی چندگانه از مقادیر عددی ارائه شود. مرتبه (همچنین درجه یا رتبهٔ) یک تنسور، ابعاد آرایه‌ای است که مورد نیاز برای نشان دادن آن است؛ یا به‌طور معادل، مرتبه یک تنسور تعداد اندیس‌هایی است که برای مشخص نمودن اجزای آن آرایه مورد نیاز است. برای مثال، یک ماتریس (یک آرایهٔ دو بعدی) در یک پایهٔ خاص از فضا نشان داده می‌شود و بنابراین یک تنسور دوبعدی است. یک بردار به‌عنوان یک آرایهٔ یک‌بعدی در یک پایه ارائه می‌شود و یک تنسور مرتبه یک است. همچنین اسکالرها اعداد منفرد هستند و در نتیجه تنسورهای مرتبه صفر را مشخص می‌کنند. بنابراین مجموعه‌ای از تنسورها بر روی یک فضای برداری، جبر تنسوری[1] را تشکیل می‌دهند.

مفاهیم تحلیل تنسوری بعد از کار کارل فریدریش گاوس[2] در هندسه دیفرانسیل به‌وجود آمد و فرمول‌بندی ریاضی آن بسیار تحت تأثیر تئوری اشکال جبری و متغیرهای توسعه یافته در اواسط قرن نوزدهم بود. کلمهٔ تنسور برای اولین بار در سال ۱۸۴۶ توسط ویلیام روان همیلتون[3] برای توصیف چیزی متفاوت از آنچه که در حال حاضر به معنای یک تنسور مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی شد. استفاده از کلمهٔ تنسور به‌صورت معنای امروزی در سال ۱۸۹۸ توسط ولدمار ویقت انجام گرفت. محاسبات تنسوری[4] در سال ۱۸۹۰ و با نام محاسبات دیفرانسیلی مطلق توسط ریچی[5] آغاز شد و در سال ۱۸۹۲ به‌صورت کامل مورد استفاده قرار گرفت. در قرن بیستم موضوع تنسور به‌صورت مباحث آنالیز تنسوری مورد مطالعه قرار گرفت و با معرفی نظریهٔ نسبیت عام انشتین[6] مورد اقبال بسیار زیاد دانشمندان واقع شد. نظریهٔ نسبیت عام به‌صورت کامل با استفاده از آنالیز تنسوری فرمول‌بندی شده بود. انشتین تمامی مفاهیم تنسوری را با دشواری بسیار از ریاضیدان بزرگی بنام مارسل گروسمن[7] آموخته بود. بعدها دانشمندی بنام لوی-سویتا[8] اشتباهات موجود در مباحث تنسوری نظریهٔ عام انشتین را برطرف نمود. مفاهیم تنسوری در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. یکی از زمینه‌های بسیار پرکاربرد آنالیز تنسوری مربوط به مبحث مکانیک محیط‌های

---

[1] Tensor algebra
[2] Johann Carl Friedrich Gauss
[3] William Rowan Hamilton
[4] Tensor calculations
[5] Gregorio Ricci-Curbastro
[6] Einstein's theory of general relativity
[7] Marcel Grossmann
[8] Tullio Levi-Civita

پیوسته[1] است. برخی از نمونه‌های مشهور تنسور در هندسهٔ دیفرانسیل، فرم‌های درجه دوم مانند تنسور متریک و تنسور انحنای ریمانی[2] هستند. از سال ۱۹۲۰ به بعد دانشمندان به کاربرد تنسورها در توپولوژی جبری پی بردند. از آن تاریخ به بعد تنسورها نقش اساسی در محاسبات مختلف هندسی و ریاضی ایفا می‌کنند.

۲-۱ مکانیک محیط‌های پیوسته

مطالعات ژئودینامیکی در مبحث مکانیک محیط‌های پیوسته مطرح می‌شود به‌طوری‌که جسم مورد نظر یک محیط پیوسته، که شامل آرایش پیوسته‌ای از ذرات مادی در جسم می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود. منظور از ذره[3] در اینجا یک المان حجمی در درون جسم بوده به گونه‌ای که اولاً به اندازهٔ کافی کوچک باشد که بتوان آن را به‌عنوان یک نقطه در نظر گرفت و دوم آن‌که ابعاد آن به قدری بزرگ بوده که به نوسانات بین مولکولی وابستگی نداشته باشد. در یک جسم پیوسته به‌طور ایده‌آل فرض می‌شود که کمّیت‌های فیزیکی را می‌توان برای تک‌تک ذرات مادّی تعریف نمود. این بدان معنا است که متغیرهای فیزیکی را می‌توان به‌صورت توابع خوش‌رفتاری از مکان و در صورت لزوم، از زمان تعریف نمود. برخی تعاریف مهم در مبحث مکانیک محیط‌های پیوسته به‌شرح زیر است:

- تغییر شکل[4]: به‌طور کلی تغییرشکل هرگونه تغییر[5]در شکل و ساختار هندسی یک جسم[6] می‌باشد. به‌عبارت دیگر می‌توان تغییر شکل را هرگونه تغییر در موقعیت نقاط جسم نسبت به یکدیگر دانست.
- مکانیک محیط‌های پیوسته: شاخه‌ای از علم مکانیک (علم مطالعهٔ حرکت و علل آن) که هدف آن مطالعه وضعیت مکانیکی جسم[7] و هرگونه تغییر در این وضعیت می‌باشد. این مطالعه در مکانیک محیط‌های پیوسته برای گازها و مایعات و اجسام جامد تغییر شکل‌پذیر با استفاده از مدل فرضی محیط پیوسته[8] به انجام می‌رسد. مدل و مفهوم پیوسته بودن محیط‌ها از ریاضیات می‌آید. مجموعه اعداد حقیقی، یک محیط پیوسته ایجاد می‌کند که در آن بین هر دو عدد حقیقی مجزا عدد حقیقی مجزای دیگری وجود

---

[1] Continuum mechanics
[2] Riemann curvature tensor
[3] Particle
[4] Deformation
[5] Alteration
[6] Configuration
[7] Mechanical State
[8] Continuum Model

دارد و بدین‌گونه همواره بی‌نهایت عدد حقیقی دیگر مابین هر دو عدد مجزای حقیقی (هرچقدر هم نزدیک به هم) یافت می‌شود.

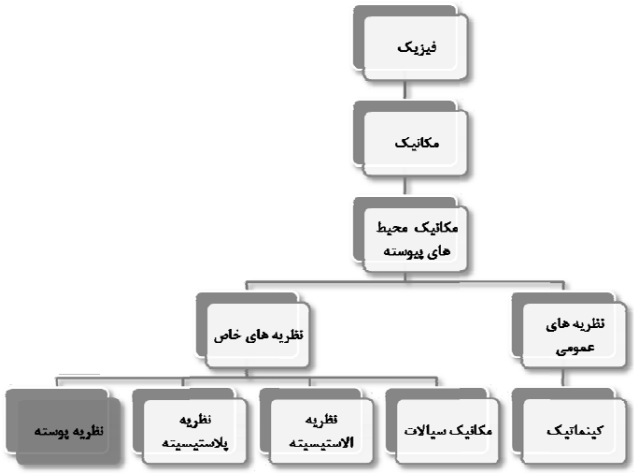
۱-۲-۱ ویژگی‌های اساسی مدل یا محیط پیوسته

برای هر مدل یا محیط پیوسته در مکانیک محیط‌های پیوسته ویژگی‌هایی به‌شرح زیر می‌توان در نظر گرفت:

۱. ماده به‌صورت پیوسته[1] در سرتاسر حجم جسم توزیع یافته است و تمام فضای جسم را پر می‌کند. به‌عبارت دیگر چشم‌پوشی از خواص مولکولی جسم در این مدل مد نظر قرار می‌گیرد.

۲. روابط ریاضی که وضیعت مکانیکی و تغییر در این وضیعت را بیان می‌نماید، تماماً توابع تنسوری[2] در نظر گرفته می‌شود. این توابع، توابعی از مختصات مکانی و زمانی بوده و خود تابع و مشتقات آن تا درجه و مرتبه مورد نیاز پیوسته فرض می‌گردد.

شاخه‌های مکانیک محیط‌های پیوسته در شکل (۱-۱) نشان داده شده است. با توجه به تعریف کلی ژئودزی، که علمی است که به مطالعهٔ شکل[3] و اندازهٔ زمین[4] و میدان ثقل[5] آن و هرگونه تغییر در این خصوصیات می‌پردازد؛ اهمیت این شاخه از علم مکانیک (مکانیک محیط‌های پیوسته) در ژئودزی روشن می‌شود.



شکل۱-۱) شاخه‌های مکانیک محیط‌های پیوسته.

برخی از زمینه‌های پرکاربرد مکانیک محیط‌های پیوسته در ژئودزی به‌شرح زیر است:

---

[1] Continuse
[2] Tensor Functions
[3] Figure
[4] Size
[5] Gravity field

۱. آنالیز تغییر شکل زمین
۲. مطالعهٔ تغییرات میدان ثقل زمین به‌عنوان یک محیط غیرمادی
۳. سرشکنی شبکه‌های ژئودزی
۴. سیستم‌های تصویر[1]
۵. مطالعهٔ انکسار جو[2]

۳-۱ سیستم‌های مختصات در ژئودزی

یکی از اهداف اصلی و مهم ژئودزی بیان شکل هندسی زمین با استفاده از اندازه‌گیری‌های صورت گرفته بر روی آن است. یکی از روش‌های موجود جهت دست‌یابی به این هدف مهم، استفاده از نقاط ثابت مختصات‌داری است که در یک چارچوب دقیق و منظم، با همدیگر در ارتباط هستند. در حقیقت برای تعریف نقاط ثابت مختصات‌دار، نیازمند تعریف یک سیستم مختصات[3] هستیم. براساس سیستم مختصات می‌توان ارتباط و تبدیل مابین مختصات‌ها را تعریف نمود. بنا به کاربرد، سیستم‌های مختصات مختلفی را می‌توان در ژئودزی و مهندسی نقشه‌برداری مورد استفاده قرار داد. از جمله مهم‌ترین سیستم‌های مختصات مورد استفاده می‌توان به سیستم‌های مختصات کارتزین متعامد و نامتعامد و همچنین سیستم‌های مختصات منحنی‌الخط اشاره نمود.

در هندسه، سیستم مختصات منحنی‌الخط[4]، یک سیستم مختصات در فضای اقلیدسی[5] است که در آن، خطوط مختصات می‌توانند منحنی باشند. سیستم‌های مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی، نمونه‌هایی خاص از دستگاه مختصات منحنی‌الخط هستند. مختصات اغلب برای تعریف مکان یا توزیع کمیت‌های فیزیکی، که ممکن است نرده‌ای، برداری یا تنسوری باشند، به‌کار می‌رود. بسته به کاربرد ممکن است یک دستگاه مختصات منحنی‌الخط ساده‌تر از مختصات کارتزین باشد. برای مثال، یک مسألهٔ فیزیکی با تقارن کروی در فضای R^3 (مانند حرکت یک ذره در یک میدان)، در سیستم مختصات کروی آسان‌تر از سیستم مختصات کارتزین حل می‌شود. سیستم مختصات کروی[6]، یکی از پرکاربردترین سیستم‌های مختصات منحنی‌الخط در مباحثی مانند علوم زمین، مهندسی و فیزیک (به‌ویژه مکانیک کوانتوم و نسبیت) به‌شمار می‌رود. سیستم مختصات منحنی‌الخط توصیفی کلی و یکپارچه از سیستم‌های مختصات استاندارد ارائه می‌دهد. اصطلاحات

[1] Map projection
[2] Atmospheric refraction
[3] Coordinate System
[4] Curvilinear coordinate system
[5] Euclidean space
[6] Spherical coordinate system